

$n=2$  coniche in  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$   $AG_2(\mathbb{R})$ ,  $EG_2(\mathbb{R})$

curve algebriche reali piano del II ordine.

$$\tilde{V}(F) \quad F \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3] \quad \deg F = 2$$

→ studiare forme bilineari simmetriche (= prod. scalari)  
a coeff in  $\mathbb{R}$ .

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{33}x_3^2 \rightarrow A$$

matrice  $3 \times 3$   
con  ${}^t A = A$

Si usa l'osservazione della base spettrale.

$+++ \rightarrow$  privo di punti reali  $++$  ellipse  
 $++- \rightarrow$  conica generale  $+ -$  iperbole  
 $+-0 \rightarrow$  parabola

$n=3$  Def: Quadrics: superficie algebraica<sup>reale</sup> del II ordine

$$Q = \tilde{V}(F) \quad F = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ omogenee}$$

$$\deg F = 2.$$

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \\ & + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + \\ & + a_{44}x_4^2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad A^T = A$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

→ prodotto scalare di  $\mathbb{R}^4$  associato alla quadrica.

STUDIAMO LE QUADRICHE DIAG. LA MATRICE A

$\mathbb{P}^3 \mathbb{C}$   
quadriche  
singolari:

|                |                                |                                            |
|----------------|--------------------------------|--------------------------------------------|
| $(1\ 1\ 1\ 1)$ | $\rightarrow \text{rk } A = 4$ | $\rightarrow$ quadriche generali           |
| $(1\ 1\ 1\ 0)$ | $\rightarrow \text{rk } A = 3$ | $\rightarrow \exists!$ punto doppio        |
| $(1\ 1\ 0\ 0)$ | $\rightarrow \text{rk } A = 2$ | $\rightarrow \exists \infty^1$ p.ti doppi  |
| $(1\ 0\ 0\ 0)$ | $\rightarrow \text{rk } A = 1$ | $\rightarrow \exists \infty^2$ p.ti doppi. |

Teoremi dell'ordine per le superficie:

- I) Sia  $\tilde{V}(F)$  una sup. algebrica di ordine  $d$ .  $\Rightarrow$  ogni piano di  $\mathbb{P}^3 \mathbb{C}$  non contenuto in  $\tilde{V}(F)$  interseca  $\tilde{V}(F)$  in una curva di ordine  $d$ .
- II) Sia  $\tilde{V}(F)$  una sup. algebrica di ordine  $d \Rightarrow$  ogni retta di  $\mathbb{P}^3 \mathbb{C}$  non contenuta in  $\tilde{V}(F)$  interseca  $\tilde{V}(F)$  in  $d$  punti.

OSS: I punti multipli di una quadrica di matrice  $A$  sono quelli i cui rappresentanti sono elementi di  $\text{Ker}(A)$ .

→ Supponiamo  $\mathcal{Q}$  abbia almeno 2 punti doppi distinti

$\Rightarrow \mathcal{Q}$  è l'unione di 2 piani  $\angle$  distinti  $\angle_{\text{in conj}}^{\text{reali}} \rightarrow \infty^1$   
 coincidenti  $\rightarrow \infty^2$

$P, Q$  doppi

la retta  $PQ$  interseca

$\mathcal{Q}$  volte  $\Rightarrow \in \mathcal{Q}$

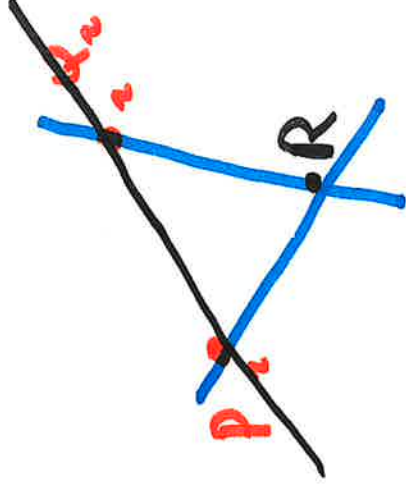
$R \in \mathcal{Q} \setminus \{P, Q\}$

$PR$  e  $QR$  hanno  $\geq 3$  int.

$\Rightarrow$  sono contenute in  $\mathcal{Q}$

$\Rightarrow$  Il piano  $\langle PQR \rangle$  interseca  $\mathcal{Q}$  almeno in

3 rette distinte  $\Rightarrow$  aveva l'ordine III  $\Rightarrow$   
 $\langle PQR \rangle \subseteq \mathcal{Q}$ .

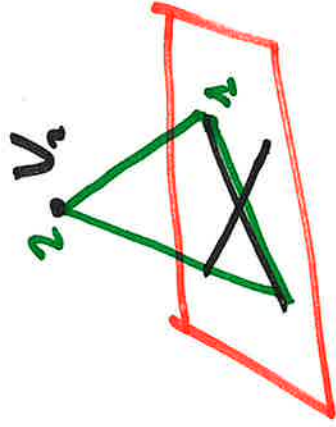


→ Se ci sono almeno 2 pt. doppi  $\Rightarrow \mathcal{Q}$  è riducibile

Supponiamo  $I$ ! punto doppio  $V$

Sia  $\pi$  un piano di  $\mathbb{P}^3$  che non  
contiene  $V \Rightarrow$

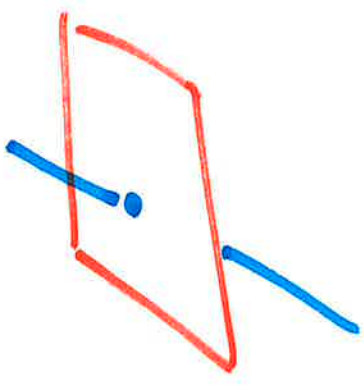
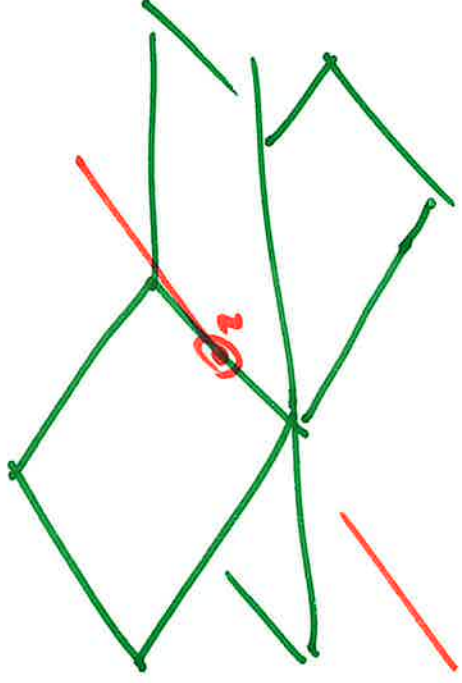
$\pi$  interseca  $\mathcal{Q}$  in una curva  
generale (= non riducibile).



Se  $\pi \cap \mathcal{Q}$  fosse riducibile  
in  $\pi \cap \mathcal{Q}$  (due rette)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  i punti  $\langle V, x \rangle \in \langle V, s \rangle$   
avrebbero contenuti in  $\mathcal{Q}$   
 $\Rightarrow \mathcal{Q}$  sarebbe riducibile nell'insieme  
di 2 piani.



in particolare i punti di  $\mathcal{L}_B, V > n \leq \mathcal{L}_B, V >$  sarebbero tutti doppi



$\Rightarrow$  ci sarebbero  $2n$  pt. doppi  $\Rightarrow 4n$

oss:  $\forall$  punto  $R$  di  $C = \pi \cap \mathcal{Q}$

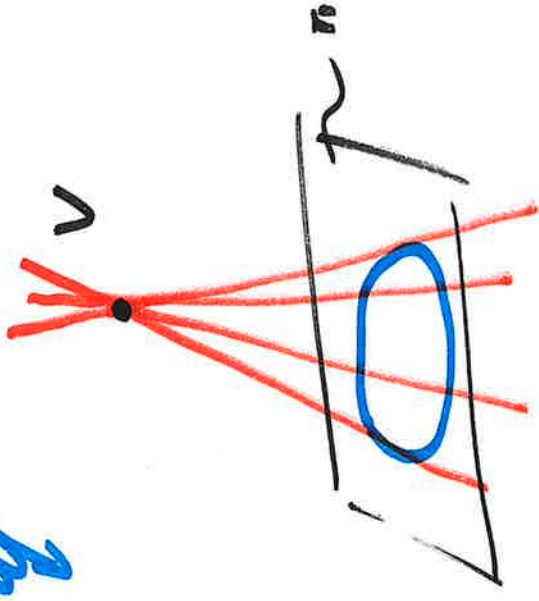
la retta  $RV$  è contenuta

in  $\mathcal{Q}$  perché interseca

volte  $\mathcal{Q}$  (2 in  $V$  ed 1 in  $R$ )

viceversa, per ogni punto  $S$  di  $\mathcal{Q}$  diverso da  $V$  un punto

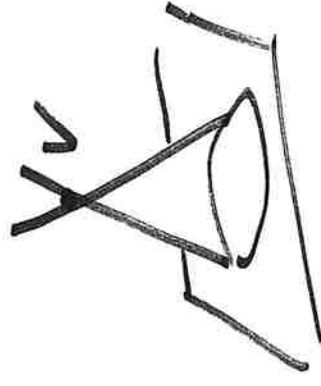
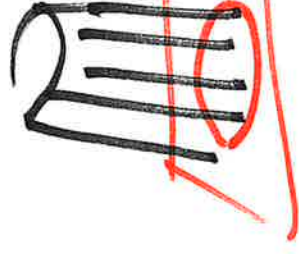
$R \in \mathcal{Q}$  tale che  $SV \ni R$



$\rightarrow \mathcal{Q}$  è unione di tutte le rette per  $V$  che proiettano la conica  $\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{Q}$ .

DEF: Si dice cilindro il luogo di tutte le rette che passano per un punto improprio  $V$  e proiettano una conica generale e con  $V \in \mathcal{E}$  il luogo di tutte le rette che passano per un punto proprio  $V$  e proiettano una conica generale  $\mathcal{C}$  con  $V \notin \mathcal{E}$ .

$V$  è detto vertice



$\mathbb{P}^3 \mathbb{R}$

$\rightarrow (1 \ 1 \ 1 \ 1)$  quadrica general.



$(++++) \rightarrow \text{prod.} \rightarrow \text{cal. def pos.} \rightarrow \text{non ci sono pt. isotropi}$

$$(++++ -) = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1)$$

$$(++-- -) = (1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1)$$

↓  
la quadrica  
contiene  
rette.



quadrica  
priva di  
punti  
realtà.

la quadrica  
non contiene  
rette.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$P, Q \in \mathcal{Q}$

$$P = [x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4']$$

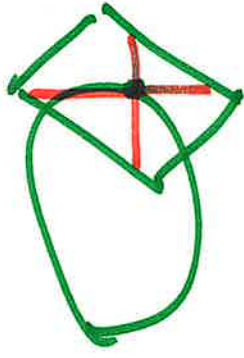
$$Q = [x_1'' \ x_2'' \ x_3'' \ x_4'']$$

$${}^t(\alpha P + \beta Q)A(\alpha P + \beta Q) = 0$$

$$\alpha^2 {}^t P A P + 2\alpha\beta {}^t P A Q + 2\alpha\beta {}^t Q A P + \beta^2 {}^t Q A Q = 0 \quad \alpha\beta \neq 0$$

$$\begin{matrix} {}^t P A Q = 0 \\ {}^t Q A P = 0 \end{matrix}$$

Su ogni piano  $\mathbb{P}_2$  la forma ha seg.  $(++0) \Rightarrow$   
 l'inversione del punto  $P^{1a}$  con  $Q$  sono 2 rette inv.  
 e coniugate. Poiché i punti  $P$  di  $\mathcal{C}$  collinari con  $P$   
 (ovvero tali che la retta che li congiunge con  $P$  dev'essere  
 avere forma  $^T P A R = 0 \Rightarrow$  si vede che non ci sono  
 punti reali di tale tipo diversi da  $P$ ).

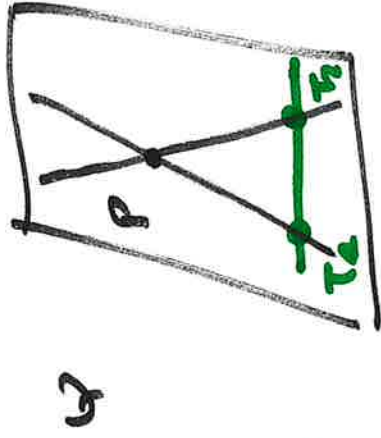


$\Rightarrow$  in questo caso il punto  $P$  è detto ellittico e  
 di conseguenza non ci sono rette di  $\mathcal{C}$  passanti per  $P$ .

Su di un pn. tangente  $P^{\perp a}$  la forma indotta abbia  
 seg.  $(+ - 0) \Rightarrow$  tale piano interseca  $\mathcal{Q}$  in una conica  
 degenerata che consiste di 2 rette ~~intersecanti~~ reali e  
 distinte  $\Rightarrow P$  è detto punto iperbolico.

$P$  ellittico se su  $P^{\perp a}$  regn.  $(++0) \quad (---0)$   
 $P$  iperbolico se su  $P^{\perp a}$  reg.  $(+-0)$   
 $P$  parabolico se su  $P^{\perp a}$  reg.  $(+00) \quad (-00)$ .

Teoremi: Se c'è un punto ellittico (iperbolico) su  $\mathcal{Q} \Rightarrow$   
 ogni punto di  $\mathcal{Q}$  è ellittico (iperbolico).



$\exists P \in Q$  iperbolico

$\Rightarrow P^{\perp Q} \cap Q$  sono

2 rette reali e

distinte.

$\bullet R$

Prendiamo  $R \notin P^{\perp Q}$  ma  $R \in Q$ .

$\Rightarrow R^{\perp Q}$  interseca  $P^{\perp Q}$  in una retta che non

passa per  $P \Rightarrow R^{\perp Q} \cap Q$  contiene  $R$

e due punti  $T_1, T_2 \in R^{\perp Q} \cap P^{\perp Q}$

e per tale conica  $R$  è punto doppio.

$\Rightarrow$  c'è una conica degenerata (= unione di 2

rette), tale che le rette passano per  $R$  e

sono reali e distinte. perché  $T_1$  e  $T_2$  sono reali

$\Rightarrow R$  è iperbolico.

Se  $S \in P^{\perp Q} \Rightarrow$  prendiamo  $R \notin P^{\perp Q}$  con

$S \notin R^{\perp Q} \Rightarrow S$  è iperbolico.

[caso ellittico  $\rightarrow$  identico ma  $T_2$  e  $T_3$  sono can. e coniugati].

(+ + - -)

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$P_1 = \bar{e}_1$$

$$P_2 = \bar{e}_3$$

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle \subseteq Q$$

$\Rightarrow Q$  è 2 punti  
iperbolici.

(+ + + -)

$P = (\bar{e}_1 + \bar{e}_n)$  e mostriamo che  $P$  è ellittico.

$$P^{\perp Q} : (1 \ 0 \ 0 \ 1) \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 - x_n$$

$$Q: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_2^2 + x_3^2 = 0$$

→

$$x_1 - x_4 = 0$$

↓

$(++0) \rightarrow$  P ellittico.  
ipz

• Quadriche generali ←  
 prive di p.l. reali  
 3 punti iperbolici  
 3 punti ellittici.

Oss: Il rango della matrice  $A$  indotta da  $A$  su di un

piano è almeno  $\text{rk}(A) - 2 = 2$

$Q_n \cap \pi_\infty$  ha  
p.l. reali

•  $(+++)/(---)$

•  $(++-)/(-+-)$  →  $Q_n \cap \pi_\infty$  è conica generale

•  $(++0)/(--0)$   
 $(+-0)/$

→  $Q_n \cap \pi_\infty$  è  
conica  
ad. in 2  
rette.

$AG_3(\mathbb{R}) \rightarrow$  Studiamo  $A^*$

$(+++)$   $\rightarrow$  ellipsoide  $\rightarrow$  3 punti ellittici  
 $(++-)$   $\rightarrow$  iperboloidi  $\rightarrow$  2 punti iperbolici  
 $(++0)$   $\rightarrow$  paraboloidi  $\rightarrow$  2 punti ellittici  
 $(+-0)$   $\rightarrow$  paraboloidi  $\rightarrow$  2 punti iperbolici